ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Οι εξισώσεις του Μάξγουελ

Η μαθηματική περιγραφή των νόμων του ηλεκτρομαγνητισμού δίνεται από τις εξισώσεις του Maxwell (1862), οι οποίες είναι οι εξής:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}.$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από τον νόμο του Coulomb και αποτελεί τη διατύπωση του νόμου του Gauss σε διαφορική μορφή. Η έκφραση στα αριστερά είναι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου (ή των γραμμών πεδίου του) ανά μονάδα απειροστού όγκου, η οποία είναι ανάλογη του ολικού φορτίου που περικλείει ο όγκος αυτός.

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Η δεύτερη εξίσωση είναι η αντίστοιχη εξίσωση για τη ροή του μαγνητικού πεδίου, η οποία εξισώνεται με μηδέν λόγω της ανυπαρξίας μαγνητικών μονοπόλων, που θα αντιστοιχούσαν στα αρνητικά ή θετικά ηλεκτρικά φορτία.

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορική μορφή του νόμου της επαγωγής του Faraday, δηλαδή του γεγονότος ότι χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει μαγνητικό πεδίο.

$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}$ Η τέταρτη εξίσωση είναι η αντίστοιχη εξίσωση της τρίτης, η οποία εκφράζει τον νόμο του Ampère, σύμφωνα με τον οποίο ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο ή ένα ηλεκτρικό ρεύμα, παράγουν μαγνητικό πεδίο.

Στο κενό, χωρίς φορτία ($\rho = 0$) ή ρεύματα ($\mathbf{J} = 0$) , οι εξισώσεις απλοποιούνται σε:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Η κυματική εξίσωση

Οι εξισώσεις του Μάξγουελ στο κενο, χωρίς φορτία ή ρεύματα, συνδυάζονται για να δώσουν τις εξισώσεις για το *ηλεκτρομαγνητικό κύμα*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

οι οποίες γράφονται και ως

$$\nabla^2 \mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 \mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που κινείται με ταχύτητα

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=299\ 792\ 458 \text{ m/s}$$

Ο μετασχηματισμός των εξισώσεων του Μάξγουελ και της κυματικής εξίσωσης

Ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

$$x'=x-Vt, \qquad y'=y, \qquad z'=z, \qquad t'=t$$

μετατρέπει την κυματική εξίσωση σε

$$\nabla'^2 \mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t'^2}+\frac{1}{c^2}\left(V^2\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'^2}-2V\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x'\partial t'}\right)$$

Ο μετασηματισμός του Λόρεντς

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \qquad y'=y, \qquad z'=z, \qquad t'=\frac{t-(V/c^2)x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

αφήνει αναλλοίωτη την κυματική εξίσωση και τις εξισώσεις του Μάξγουελ, με την πεοϋπόθεση ότι τα πεδία μετασχηματίζονται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο.

Η δύναμη του Λόρεντς

Η δύναμη του Λόρεντς, που ασκείται πάνω σε ένα φορτίο το οποίο κινείται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και ένα μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, είναι

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B}$$

παραμένει αναλλοίωτη κατά τον μετασχηματισμό του Λόρεντς.

Το αναλλοίωτο του ηλεκτρικού φορτίου

Σε αντίθεση με τη μάζα, το ηλεκτρικό φορτίο δεν μεταβάλλεται με την ταχύτητα. Ένα φορτίο που έχει τιμή Q σε ένα σύστημα αναφοράς, έχει την ίδια τιμή σε όλα τα συστήματα αναφοράς.

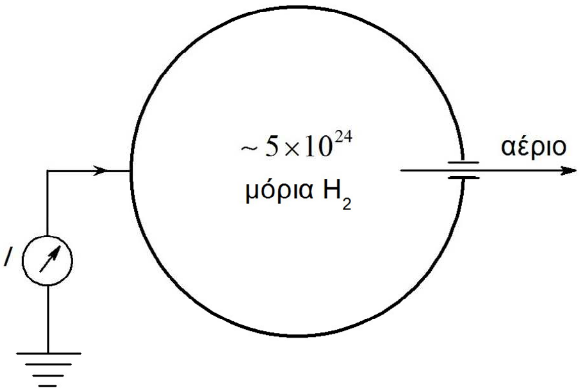
Αν θεωρηθεί ότι οι εξισώσεις του Maxwell είναι σύμφωνες με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, το αναλλοίωτο του ηλεκτρικού φορτίου προκύπτει ως συνέπεια.

Αυτό είναι συνέπεια των μετασχηματισμών της πυκνότητας φορτίου ρ και της πυκνότητας ρεύματος $\mathbf{J}$ οι οποίοι αφήνουν αναλλοίωτη την εξίσωση της συνέχειας του φορτίου, η οποία, με τη σειρά της, προκύπτει από τη διατήρηση του φορτίου.

Αυτό επιβεβαιώνεται πειραματικά.

Το 1960, ο King χρησιμοποίησε ένα δοχείο, ηλεκτρικά απομονωμένο από το περιβάλλον, το οποίο περιείχε αέριο υδρογόνο. Από μια μικρή οπή το αέριο μπορούσε να διαφύγει, με έναν τέτοιο τρόπο που εμπόδιζε τη διαφυγή ιονισμένων μορίων.

Το δοχείο περιείχε συνολικά 17 γραμμάρια H_2 ή περίπου 5×10^{24} μόρια.



Το κάθε μόριο του H_2 έχει δύο πρωτόνια και δύο ηλεκτρόνια.
Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι ίση με $c/137$, περίπου.

Αν τα μόρια είχαν κάποιο φορτίο, η σταδιακή φόρτιση του αρχικά ουδέτερου δοχείου καθώς τα φορτισμένα μόρια διέφευγαν θα μπορούσε να ανιχνευτεί πάνω από κάποιο επίπεδο.

Καμιά φόρτιση του δοχείου δεν παρατηρήθηκε, σε τέτοια ευαισθησία που θέτει ένα ανώτατο όριο στο όποιο φορτίο υπάρχει στο «ουδέτερο» μόριο του H_2 ίσο με $10^{-19}|e|$ σε απόλυτη τιμή.

Οι Hughes, Fraser και Carlson (1988) προσπάθησαν να ανιχνεύσουν ηλεκτροστατική απόκλιση των «ουδέτερων» ατόμων μιας δέσμης από άτομα καισίου. Το ίδιο πείραμα έγινε και με δέσμη ατόμων καλίου.

Κανένα φορτίο δεν ανιχνεύτηκε που θα σήμαινε μια διαφορά μεγαλύτερη από $3,5\times10^{-19}\,|e|$ στις απόλυτες τιμές των φορτίων του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου. Στα άτομα του καισίου, το οποίο έχει ατομικό αριθμό $Z=55$, τα ηλεκτρόνια του φλοιού K έχουν ταχύτητες της τάξης του $0,4c$, οπότε η ουδετρότητα των ατόμων του καισίου αποτελεί σημαντική μαρτυρία για το αναλλοίωτο του φορτίου.

Η εξίσωση της κίνησης $$\frac{d}{dt}\left(\frac{M_0\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)=q\mathbf{E}+q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}$$

έχει επιβεβαιωθεί από πειράματα όπως αυτά του Kaufmann και στην κατασκευή και λειτουργία επιταχυντών μεγάλων ενεργειών.

Σε αυτούς, η μεταβολή της αδρανειακής μάζας με την ταχύτητα λαμβάνεται υπόψη. Μαγνητικά πεδία χρησιμοποιούνται για την απόκλιση των επιταχυνομένων σωματιδίων, και η εξίσωση χρησιμοποιείται με σταθερό το φορτίο q.

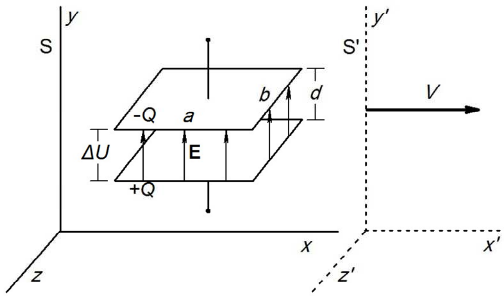
Η ενέργεια στην οποία επιταχύνονται ηλεκτρόνια από τα σημερινά σύγχροτρα ξεπέρασε τα 25 GeV, ενώ πρωτόνια έχουν επιταχυνθεί προσφάτως σε ενέργειες 7 TeV στο CERN, με τον επιταχυντή LHC. Ας σημειωθεί ότι ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 25 GeV κινείται με ταχύτητα $0,999\,999\,999\,8c$, ($\gamma=49\,000$) ενώ ένα πρωτόνιο ενέργειας 7 TeV κινείται με ταχύτητα $0,999\,999\,991\,3c$ ($\gamma=7560$).

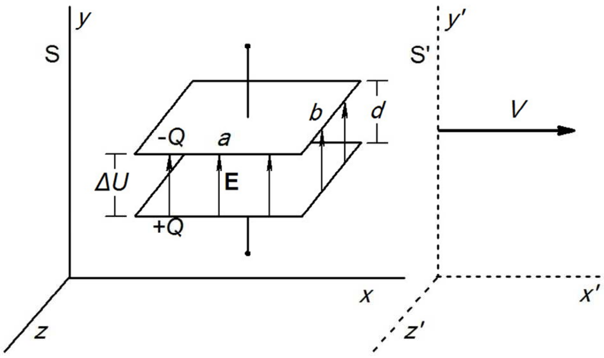
Ακόμη και σε τέτοιες ταχύτητες του κινούμενου φορτίου η εξίσωση για τη δύναμη Λόρεντς είναι επαρκής, με το φορτίο q αναλλοίωτο.

Άσκηση ΧΧ. Το ηλεκτρικό πεδίο σε έναν πυκνωτή

Ένας πυκνωτής με παράλληλους επίπεδους οπλισμούς βρίσκεται ακίνητος, στο κενό, σε ένα σύστημα αναφοράς . Οι οπλισμοί του πυκνωτή είναι παράλληλοι προς το επίπεδο *xz* και είναι ορθογώνιοι, με πλευρές *a* και *b* οι οποίες είναι παράλληλες προς τους άξονες *x* και *z*, αντίστοιχα. Η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς είναι ίση με *d*. Οι δύο οπλισμοί φέρουν φορτία $+Q$ και $-Q$, αντίστοιχα. Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι ΔU και το ηλεκτρικό πεδίο στον χώρο μεταξύ των οπλισμών είναι E.

Με δεδομένο ότι το φορτίο είναι αναλλοίωτο, να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή, όπως τα μετράει ένας παρατηρητής σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, S', το οποίο κινείται ως προς το σύστημα S με ταχύτητα *V* στην κατεύθυνση των θετικών *x*.



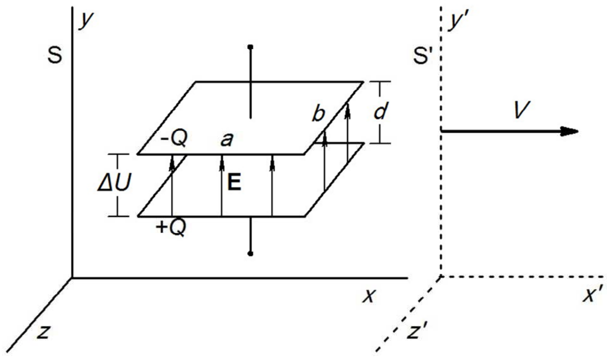


Η χωρητικότητα του πυκνωτή στο σύστημα S είναι $C = \varepsilon_0 \dfrac{ab}{d}$

Επειδή τα φορτία στους οπλισμούς είναι $\pm Q$,
η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $\Delta U = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\dfrac{d}{ab}$

και το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των οπλισμών έχει ένταση

$$E = \frac{\Delta U}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{ab}$$



Στο σύστημα αναφοράς S′, τα φορτία στους οπλισμούς παραμένουν ίσα με $\pm Q$, και οι διαστάσεις του πυκνωτή είναι οι ίδιες, εκτός από το μήκος a στην κατεύθυνση της σχετικής κίνησης των δύο συστημάτων, η οποία συστέλλεται σε a/γ. Επομένως, στο σύστημα S′, είναι:

$$C' = \varepsilon_0 \frac{ab}{\gamma d} = \frac{C}{\gamma} \ , \qquad \Delta U' = \frac{Q}{C'} = \gamma \, \Delta U \ , \qquad E' = \frac{\Delta U'}{d} = \gamma E \ .$$

Οι μετασχηματισμοί του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου

Έστω ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς $\mathrm{S}:(x, y, z, t)$ είναι $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$, αντίστοιχα, και στο αδρανειακό σύστημα $\mathrm{S}':(x', y', z', t')$, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S, είναι $\mathbf{E}'$ και $\mathbf{B}'$.

Ένα σωματίδιο με φορτίο q κινείται στο σύστημα S με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ και στο σύστημα S΄ με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}'$. Η δύναμη Lorentz που ασκείται πάνω στο φορτίο στα δύο συστήματα είναι:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\boldsymbol{\upsilon} \times \mathbf{B} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q\boldsymbol{\upsilon}' \times \mathbf{B}'$$

Οι συνιστώσες y και y' των δυνάμεων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{F}'$ είναι

$$F_y = q\left(E_y + \upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z\right) \qquad \text{και} \qquad F'_y = q\left(E'_y + \upsilon'_z B'_x - \upsilon'_x B'_z\right)$$

Η συνιστώσα y της δύναμης μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)} \qquad \text{όπου} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} \ .$$

Επομένως, $F_y = \gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)F'_y$

και $q\left(E_y + \upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z\right) = \gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right) q\left(E'_y + \upsilon'_z B'_x - \upsilon'_x B'_z\right)$

Ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων δίνει

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - V\upsilon_x / c^2}, \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)}$$

Έτσι, $E_y + \upsilon_z B_x - \upsilon_x B_z = \gamma\left(1 - V\upsilon_x / c^2\right)E'_y + \upsilon_z B'_x - \gamma\left(\upsilon_x - V\right)B'_z$

ή $\left[E_y - \gamma\left(E'_y + VB'_z\right)\right] - \left[B_z - \gamma\left(B'_z + VE'_y / c^2\right)\right]\upsilon_x + \left[B_x - B'_x\right]\upsilon_z = 0$

Αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$. Εξισώνοντας τους συντελεστές των συνιστωσών της $\boldsymbol{\upsilon}$ με μηδέν, βρίσκουμε

$$E_y = \gamma\left(E'_y + VB'_z\right), \qquad B_x = B'_x, \qquad B_z = \gamma\left(B'_z + VE'_y / c^2\right).$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε τον μετασχηματισμό και των E_x, E_z, B_y.

Ο μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι:

$$\boxed{\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right) & E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + VE_z / c^2\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - VE_y / c^2\right) \end{array}}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

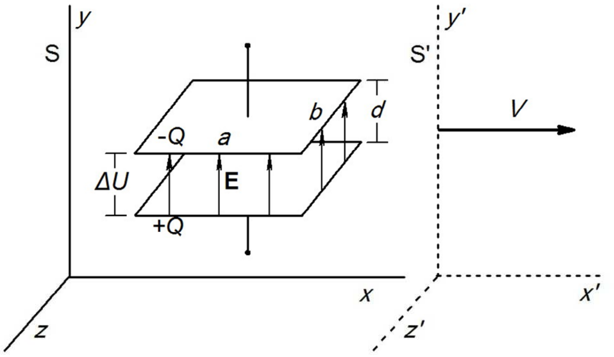
$$\boxed{\begin{array}{lll} E_x = E'_x & E_y = \gamma\left(E'_y + VB'_z\right) & E_z = \gamma\left(E'_z - VB'_y\right) \\ B_x = B'_x & B_y = \gamma\left(B'_y - VE'_z / c^2\right) & B_z = \gamma\left(B'_z + VE'_y / c^2\right) \end{array}}$$

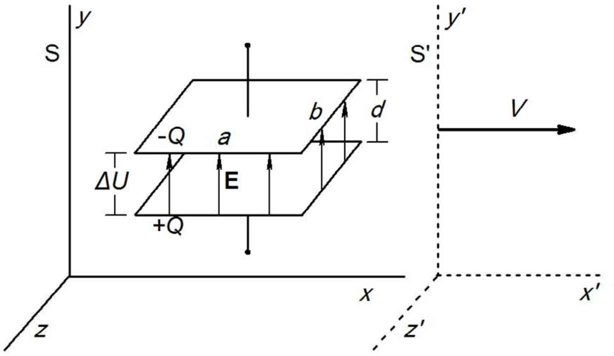
Διανυσματικά,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' - (\gamma - 1)\dfrac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}'\right) - \gamma\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}'\right) \\ \mathbf{B} = \gamma\mathbf{B}' - (\gamma - 1)\dfrac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}'\right) + \dfrac{\gamma}{c^2}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{E}'\right) \end{array}}$$

Άσκηση XX. Τα πεδία σε έναν κινούμενο πυκνωτή

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς των πεδίων, να βρεθεί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στο χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή, όπως τα μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S΄ το οποίο κινείται με ταχύτητα *V* ως προς τον πυκνωτή, όπως φαίνεται στο σχήμα.





Στο σύστημα αναφοράς S, οι συνιστώσες των πεδίων στο χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι:

$$E_x = 0, \quad E_y, \quad E_z = 0, \qquad B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = 0$$

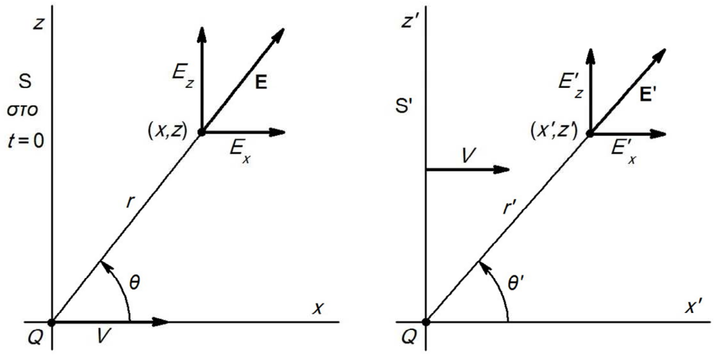
Ο μετασχηματισμός των πεδίων δίνει για το σύστημα αναφοράς S΄:

$$E'_x = E_x = 0, \quad E'_y = \gamma\left(E_y - VB_z\right) = \gamma E_y, \quad E'_z = \gamma\left(E_z + VB_y\right) = 0$$

$$B'_x = B_x = 0, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + VE_z / c^2\right) = 0, \quad B'_z = \gamma\left(B_z - VE_y / c^2\right) = -\gamma VE_y / c^2$$

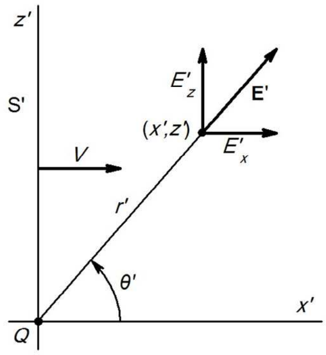
Τα πεδία ενός κινούμενου ηλεκτρικού φορτίου

Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S, το φορτίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ πάνω στον άξονα των x. Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S΄ το φορτίο Q είναι ακίνητο στην αρχή των αξόνων.



Το φορτίο δημιουργεί στο σύστημα S΄ τα πεδία

$$\mathbf{E}' = \frac{Q\mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \quad \text{και} \quad \mathbf{B}' = 0 \ .$$



Τα πεδία έχουν αξονική συμμετρία γύρω από τον άξονα των x. Γι' αυτό υπολογίζουμε τα πεδία πάνω στο επίπεδο xz, στο οποίο οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E'_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\cos\theta' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{(x'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E'_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\sin\theta' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{(x'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων του φορτίου είναι

$$x' = \gamma(x - Vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \gamma(t - Vx/c^2)$$

όπου t είναι ο χρόνος που πέρασε από τη στιγμή που οι αρχές των δύο συστημάτων συνέπεσαν.

Ο μετασχηματισμός του ηλεκτρικού πεδίου, δίνει, για $\mathbf{B}' = 0$,

$$E_x = E'_x \qquad \text{και} \qquad E_z = \gamma\left(E'_z - VB'_y\right) = \gamma E'_z \quad .$$

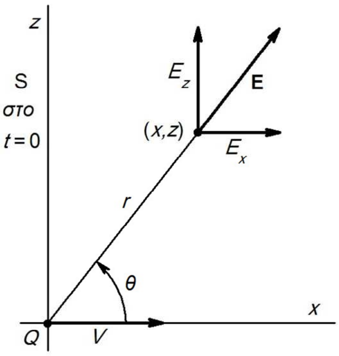
Επομένως, για $t = 0$, όταν το φορτίο Q περνά από την αρχή των αξόνων του συστήματος S, είναι

$$E_x = E'_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{(x'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma Q x}{4\pi\varepsilon_0(\gamma^2 x^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{\gamma Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{(x'^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\gamma Q z}{4\pi\varepsilon_0(\gamma^2 x^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E^2 = E'^2_x + E'^2_y = \frac{\gamma^2 Q^2 (x^2+z^2)}{(4\pi\varepsilon_0)^2(\gamma^2 x^2 + z^2)^3} =$$

$$= \frac{Q^2(x^2+z^2)}{(4\pi\varepsilon_0)^2\gamma^4(x^2+z^2-\beta^2 z^2)^3}$$



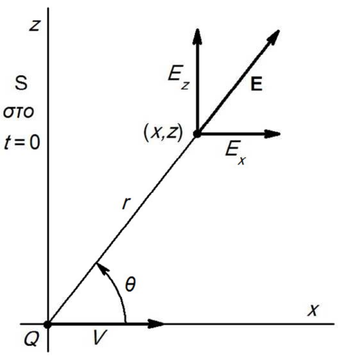
$$E^2 = \frac{Q^2(1-\beta^2)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2(x^2+z^2)^2\left(1-\dfrac{\beta^2 z^2}{x^2+z^2}\right)^3}$$

Συναρτήσει των r και θ,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

Διανυσματικά,

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}}$$



Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου

Για $\mathbf{B}'=0$, οι εξισώσεις του μετασχηματισμού των πεδίων

$$\mathbf{E}=\gamma\mathbf{E}'-(\gamma-1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}'\right)-\gamma\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}'\right)$$

και

$$\mathbf{B}=\gamma\mathbf{B}'-(\gamma-1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}'\right)+\frac{\gamma}{c^2}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{E}'\right)$$

γίνονται

$$\mathbf{E}=\gamma\mathbf{E}'-(\gamma-1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}'\right) \qquad \mathbf{B}=\frac{\gamma}{c^2}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{E}'\right)$$

Όμως, $\mathbf{V}\times\mathbf{E}=\gamma\mathbf{V}\times\mathbf{E}'$, οπότε $\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{E}$

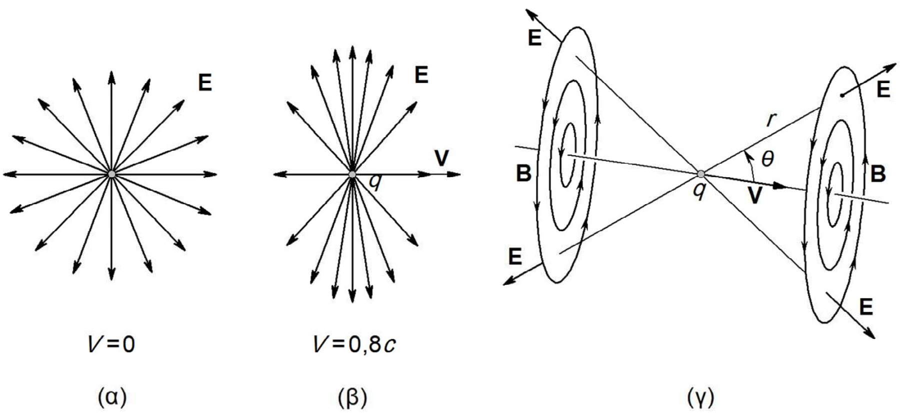
η οποία, με την $c^2=1/\varepsilon_0\mu_0$, δίνει

$$\boxed{\mathbf{B}=\frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\mathbf{V}\times\hat{\mathbf{r}}}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό αλλά όχι σφαιρικά συμμετρικό.

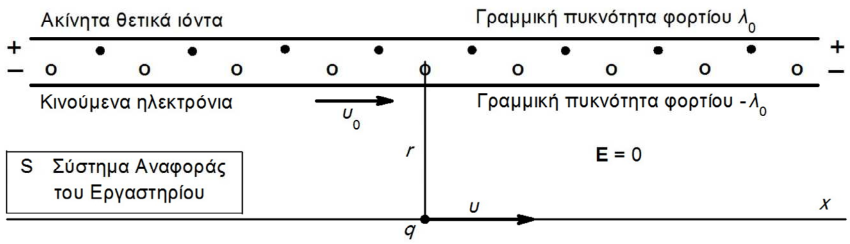
Για μεγάλες ταχύτητες το πεδίο είναι έντονα συγκεντρωμένο στο επίπεδο που είναι κάθετο στην ταχύτητα του φορτίου

Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κύκλοι, που έχουν τα κέντρα τους πάνω στην ευθεία κίνησης του φορτίου



Δύναμη που ασκείται πάνω σε κινούμενο φορτίο από ηλεκτρικό ρεύμα

Συνοπτικά

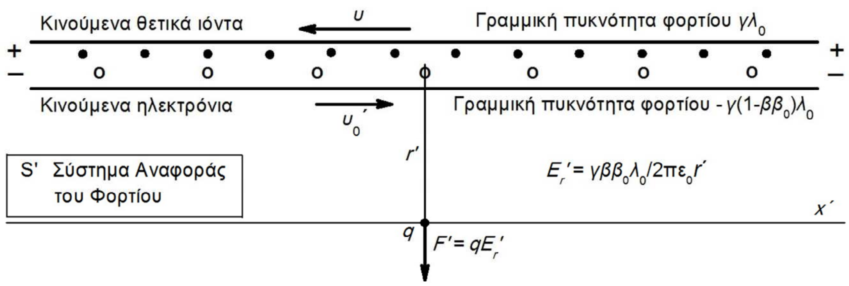


Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου

Ουδέτερος αγωγός. Ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = 0$

Θετικά ιόντα: Ακίνητα. Γραμμική πυκνότητα φορτίου $+\lambda_0$.
Ηλεκτρόνια: Ταχύτητα υ_0. Γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\lambda_0$.

Φορτίο q απέχει απόσταση r από τον αγωγό. Ταχύτητα υ.



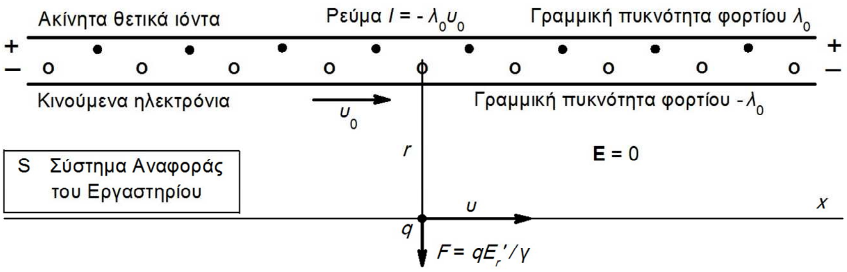
Σύστημα Αναφοράς του Φορτίου

Θετικά ιόντα: Ταχύτητα$-\upsilon$. Γραμμική πυκνότητα φορτίου $\gamma\lambda_0$.
Ηλεκτρόνια: Ταχύτητα υ_0'. Γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\lambda_0(\gamma_0' / \gamma_0)$.

Ολική γραμμική πυκνότητα φορτίου: $\lambda' = \gamma\beta\beta_0\lambda_0$

Ηλεκτρικό πεδίο: $E_r' = \dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \dfrac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'}$

Φορτίο q ακίνητο. Δύναμη πάνω στο φορτίο: $F_y' = qE_y' = -\dfrac{q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'}$



<u>Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου</u>

Δύναμη πάνω στο φορτίο: $F_y = F_y' / \gamma \qquad F_y = -\dfrac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Ηλεκτρικό ρεύμα στον αγωγό $I = -\lambda_0\upsilon_0 = -\lambda_0\beta_0 c$

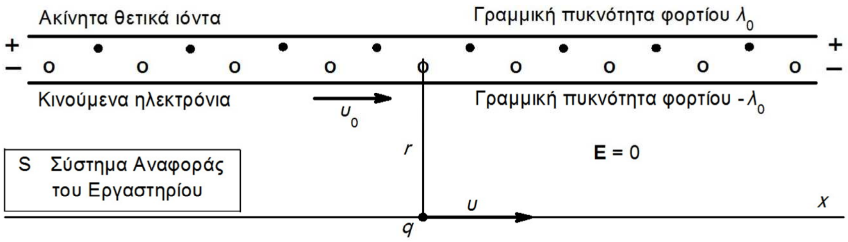
Επομένως, $F_y = \dfrac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} q\upsilon_x$. Με $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$, $\qquad F_y = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} q\upsilon_x$

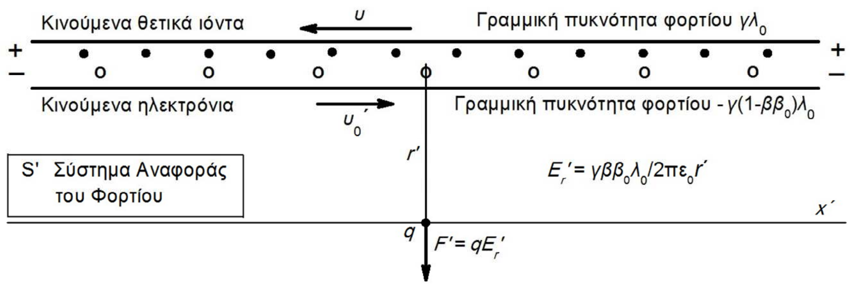
Αυτή είναι η δύναμη που ασκεί ένα μαγνητικό πεδίο ίσο με $B_r(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ πάνω σε φορτίο q που κινείται με ταχύτητα υ_x.

Δύναμη που ασκείται πάνω σε κινούμενο φορτίο από ηλεκτρικό ρεύμα

<u>**Αναλυτικά**</u>

Θα θεωρήσουμε ότι, στο Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου (ΣΑΕ), υπάρχει ακίνητος ουδέτερος αγωγός. Τα θετικά ιόντα του αγωγού είναι ακίνητα και έχουν (θετική) πυκνότητα φορτίου $+\lambda_0$. Τα ηλεκτρόνια του αγωγού έχουν (αρνητική) πυκνότητα φορτίου $-\lambda_0$ και κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα υ_0 προς τα θετικά *x*. Ένα φορτίο *q* απέχει απόσταση *r* από τον αγωγό και κινείται προς τα θετικά *x*, με ταχύτητα υ στο ΣΑΕ. Στο ΣΑΕ ο αγωγός είναι ηλεκτρικά ουδέτερος και δεν δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο.





Στο Σύστημα Αναφοράς του Φορτίου (ΣΑΦ) το φορτίο είναι ακίνητο, τα θετικά ιόντα κινούνται προς τα αρνητικά x με ταχύτητα $-\upsilon$ και τα ηλεκτρόνια κινούνται τώρα με ταχύτητα υ_0' στην κατεύθυνση του άξονα των x.

Ορίζουμε τα μεγέθη:

$$\beta \equiv \frac{\upsilon}{c}, \quad \beta_0 \equiv \frac{\upsilon_0}{c}, \quad \beta_0' \equiv \frac{\upsilon_0'}{c},$$

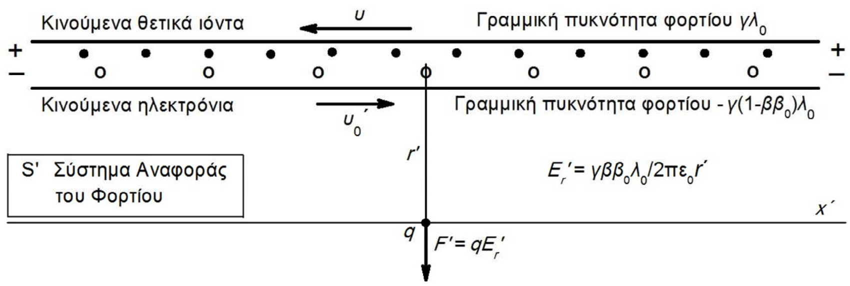
$$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \gamma_0 \equiv 1/\sqrt{1-\beta_0^2}, \quad \gamma_0' \equiv 1/\sqrt{1-\beta_0'^2}$$

Από τον σχετικιστικό νόμο πρόσθεσης των ταχυτήτων, βρίσκουμε ότι η ανηγμένη ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο ΣΑΦ είναι

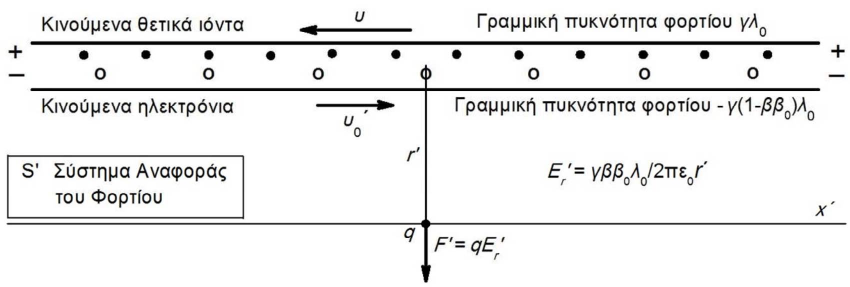
$$\beta_0' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0}$$

Από τον μετασχηματισμό του παράγοντα του Λόρεντς έχουμε

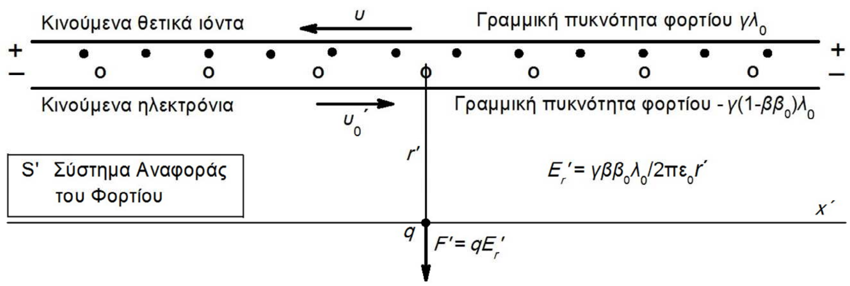
$$\gamma_0' = 1/\sqrt{1-\beta_0'^2} = \gamma\gamma_0\left(1-\beta\beta_0\right)$$



Επειδή στο ΣΑΦ τα θετικά ιόντα κινούνται τώρα, οι αποστάσεις ανάμεσά τους συστέλλονται κατά έναν παράγοντα $1/\gamma$ και έτσι η γραμμική πυκνότητα του θετικού φορτίου είναι μεγαλύτερη από όσο στο ΣΑΕ και ίση με $\gamma\lambda_0$. Τα ηλεκτρόνια, τώρα, βρίσκονται σε κίνηση με ταχύτητα υ_0 στο ΣΑΕ. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου των ηλεκτρονίων στο ΣΑΕ είναι $-\lambda_0$. Στο δικό τους σύστημα αναφοράς, χωρίς συστολή μήκους, η γραμμική πυκνότητα φορτίου των θα είναι $-\lambda_0/\gamma_0$.



Στη συνέχεια, στο ΣΑΦ, στο οποίο τα ηλεκτρόνια κινούνται με ταχύτητα υ_0', οι αποστάσεις ανάμεσά τους είναι μικρότερες κατά έναν παράγοντα $1/\gamma_0'$ συγκρινόμενες με αυτές στο δικό τους σύστημα, και η γραμμική πυκνότητα του αρνητικού φορτίου είναι $-\lambda_0(\gamma_0'/\gamma_0)$.



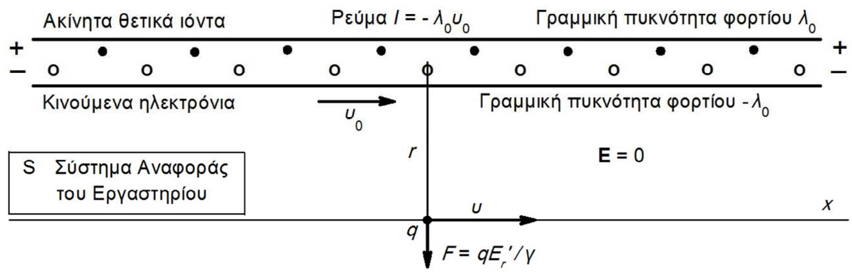
Η ολική γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι το αλγεβρικό άθροισμα των δύο πυκνοτήτων και ίση με

$$\lambda' = \gamma\lambda_0 - \lambda_0 \frac{\gamma_0'}{\gamma_0} \qquad \lambda' = \gamma\lambda_0 - \lambda_0 \frac{1}{\gamma_0}\gamma\gamma_0\left(1-\beta\beta_0\right) \qquad \lambda' = \gamma\beta\beta_0\lambda_0$$

Στο ΣΑΦ, ο αγωγός είναι φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ'. Δημιουργεί, επομένως, ένα ηλεκτρικό πεδίο που είναι κάθετο στον άξονα του αγωγού και έχει ένταση

$$E_r' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'}$$

Το πεδίο αυτό ασκεί στο φορτίο q δύναμη $\quad F_y' = qE_y' = -\dfrac{q\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r'}$



Μετασχηματίζοντας πίσω στο Σύστημα Αναφοράς του Εργαστηρίου, η απόσταση του φορτίου από τον αγωγό παραμένει $r = r'$ και η δύναμη μετασχηματίζεται σε $F_y = F_y' / \gamma$ ή

$$F_y = -\frac{q\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα στον αγωγό, όπως αυτό μετράται στο ΣΑΕ, είναι

$$I = -\lambda_0 \upsilon_0 = -\lambda_0 \beta_0 c$$

Επομένως,

$$F_y = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r} q\upsilon_x$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ βρίσκουμε ότι

$$F_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} q\upsilon_x$$

Αυτή είναι η δύναμη που ασκεί ένα ακτινικό μαγνητικό πεδίο ίσο με

$$B_r(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

πάνω σε φορτίο q που κινείται με ταχύτητα υ_x.

Είδαμε ότι ένας ηλεκτρικά ουδέτερος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα, εμφανίζεται φορτισμένος στο σύστημα αναφοράς ενός κινούμενου φορτίου και ασκεί μια ηλεκτρική δύναμη πάνω σε αυτόν. Μετασχηματιζόμενη στο σύστημα του εργαστηρίου, αυτή η δύναμη εμφανίζεται ως μαγνητική δύναμη.

Φ.6 Η μέση διάρκεια ζωής των ακίνητων μιονίων είναι $\tau = 2,2\times10^{-6}$ s. Τα μιόνια σε μια δέσμη παρατηρούνται να έχουν μέση διάρκεια ζωής $\tau_{\mathrm{E}} = 1,5\times10^{-5}$ s. Ποια είναι η ταχύτητα των μιονίων στη δέσμη;

ΛΥΣΗ

Οι μέσες διάρκειες ζωής των μιονίων στο δικό τους σύστημα αναφοράς και στο σύστημα του εργαστηρίου συνδέονται μέσω της σχέσης $\tau_{\mathrm{E}} = \gamma\tau$, όπου γ είναι ο παράγοντας Λόρεντς που αντιστοιχεί στην ταχύτητα των μιονίων. Επομένως,

$$\frac{1}{\gamma^2} = \left(\frac{\tau}{\tau_{\mathrm{E}}}\right)^2 = 1-\beta^2, \quad \beta = \sqrt{1-\left(\frac{\tau}{\tau_{\mathrm{E}}}\right)^2}, \quad \beta = \sqrt{1-\left(\frac{2,2\times10^{-6}}{1,5\times10^{-5}}\right)^2} = 0,989$$

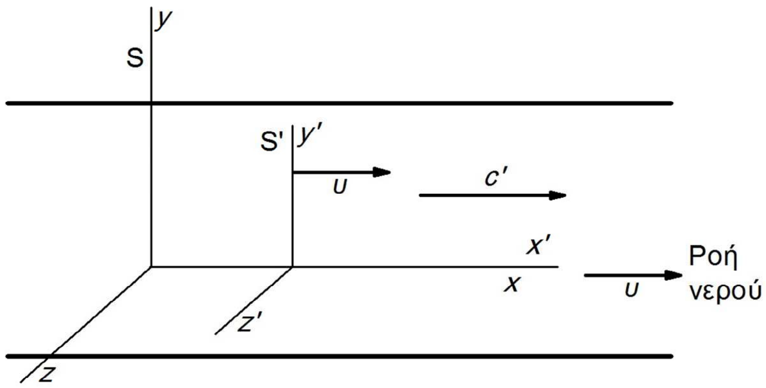
και η ταχύτητα των μιονίων είναι $V = 0,989c$.

Άσκηση ΧΧ Το 1851, ο Φιζώ μέτρησε την ταχύτητα του φωτός μέσα σε ένα μέσον (το νερό) που βρισκόταν σε κίνηση μέσα στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Θα θεωρήσουμε μια δέσμη φωτός που διαδίδεται μέσα σε μια στήλη νερού, το οποίο κινείται με ταχύτητα υ ως προς το εργαστήριο. Ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι ίσος με n και επομένως η ταχύτητα του φωτός ως προς το νερό είναι ίση με c/n, όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

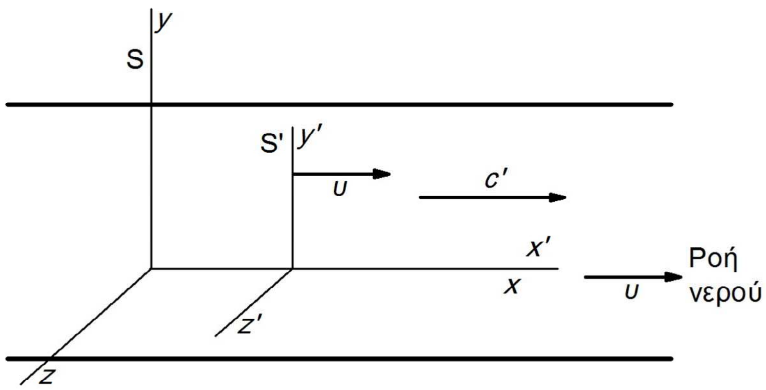
Δείξετε ότι η ταχύτητα του φωτός ως προς το εργαστήριο είναι ίση με

$$u = c\left(\frac{c + n\upsilon}{\upsilon + nc}\right)$$

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου ως το σύστημα S, μέσα στο οποίο το νερό κινείται με ταχύτητα υ. Θα συνδέσουμε με το κινούμενο νερό ένα σύστημα αναφοράς S΄, το οποίο, επομένως, κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S.



Η ταχύτητα του φωτός μέσα στο νερό και επομένως και ως προς το σύστημα S΄ είναι $\upsilon'_x = c' = c/n$.

Μετασχηματίζοντας, βρίσκουμε την ταχύτητα του φωτός ως προς το σύστημα του εργαστηρίου,

$$u = \upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon}{1 + \upsilon'_x \upsilon / c^2} = \frac{c' + \upsilon}{1 + c'\upsilon / c^2} = \frac{c/n + \upsilon}{1 + \upsilon / nc} \qquad \text{ή} \qquad u = c\left(\frac{c + n\upsilon}{\upsilon + nc}\right).$$

Φ.4 Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S , ένα σωματίδιο έχει συνιστώσες ταχύτητας $\upsilon_x = c/\sqrt{2}$ και $\upsilon_y = c/\sqrt{2}$. Σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το S', που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το S, η ταχύτητα του σωματιδίου έχει συνιστώσα $\upsilon'_x = -c/\sqrt{2}$. Να βρεθεί η *V* και η υ'_y .

ΛΥΣΗ

Η συνιστώσα *x* της ταχύτητας του σωματιδίου στο S είναι: $\upsilon_x = c/\sqrt{2}$.
Η συνιστώσα *x* της ταχύτητας του σωματιδίου στο S' είναι: $\upsilon'_x = -c/\sqrt{2}$.
Ο μετασχηματισμός της συνιστώσας αυτής από το σύστημα S στο S' είναι:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}}$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή την εξίσωση έχουμε:

$$-\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c/\sqrt{2} - V}{1 - V/\sqrt{2}c} \qquad \text{ή} \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1/\sqrt{2} - \beta}{1 - \beta/\sqrt{2}}, \quad \text{όπου} \quad \beta = \frac{V}{c}$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\beta}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\beta, \qquad \frac{3}{2}\beta=\frac{2}{\sqrt{2}}, \qquad \beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Υπολογίζουμε τη συνιστώσα *y* της ταχύτητας στο σύστημα S' :

Από τη σχέση $\upsilon'_{Ay}=\dfrac{\upsilon_{Ay}}{\gamma\left(1-\dfrac{\upsilon_{Ax}\upsilon}{c^2}\right)}$ βρίσκουμε

$$\upsilon'_{Ay}=\frac{\upsilon_{Ay}}{\gamma\left(1-\dfrac{\upsilon_{Ax}\upsilon}{c^2}\right)}=\frac{c/\sqrt{2}}{3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)}=\frac{c}{\sqrt{2}}\frac{1}{3-2}=\frac{c}{\sqrt{2}}$$

Φ.9 Μια πηγή φωτός κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα 0,5*c*. Ποια είναι η μετατόπιση, λόγω του φαινομένου Ντόπλερ, στην κίτρινη φασματική γραμμή του νατρίου, όπως αυτή παρατηρείται από παρατηρητή στο κέντρο του κύκλου; Η γραμμή αυτή έχει μήκος κύματος 589 nm στο εργαστήριο.

ΛΥΣΗ

Είναι $\beta=0,5$ και επομένως $\gamma=2/\sqrt{3}$.

Η μεταβολή στο μήκος κύματος οφείλεται αποκλειστικά στο εγκάρσιο φαινόμενο Ντόπλερ και επομένως $\lambda=\lambda_0\gamma$, όπου $\lambda_0=589\ \text{nm}$ είναι το μήκος κύματος στο σύστημα αναφοράς της πηγής και λ το μήκος κύματος στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Η μετατόπιση της φασματικής γραμμής θα είναι:

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\lambda_0(\gamma-1)=589\left(2/\sqrt{3}-1\right)=91\ \text{nm}$$

Φ.11 Ένα ηλεκτρόνιο με ολική ενέργεια 100 MeV κινείται κατά μήκος ενός σωλήνα μήκους 5 m. Ποιο είναι το μήκος του σωλήνα στο σύστημα αναφοράς του ηλεκτρονίου; Η ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου είναι $E_0 = m_0 c^2 = 0,511\ \mathrm{MeV}$, όπου m_0 είναι η μάζα ηρεμίας του.

ΛΥΣΗ

Αν γ είναι ο παράγοντας Λόρεντς που αντιστοιχεί στην ταχύτητα του ηλεκτρονίου, η ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $E = m_0 c^2 \gamma$, και επομένως

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \frac{100}{0,511} = 196$$

Αφού $l = 5\ \mathrm{m}$ είναι το μήκος του σωλήνα στο εργαστήριο, το μήκος του σωλήνα στο σύστημα αναφοράς του ηλεκτρονίου θα είναι

$$l_0 = l / \gamma = 5\ \mathrm{m} / 196 = 0,026\ \mathrm{m} = 26\ \mathrm{mm}$$

Φ.12 Μια δέσμη πιονίων π^+, ενέργειας 1 GeV, έχει συνολική ροή 10^6 σωματίδια/s στην αρχή μιας διαδρομής που έχει μήκος 10 m στο σύστημα του εργαστηρίου. Ποια είναι η ροή των σωματιδίων στο τέλος της διαδρομής; Το π^+ έχει μάζα ηρεμίας $m_\pi = 139\ \mathrm{MeV}/c^2$ και μέση διάρκεια ζωής $\tau_\pi = 2,56 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}$.

ΛΥΣΗ

Η ολική ενέργεια ενός πιονίου είναι $E = m_\pi c^2 \gamma$ και, επομένως,

$$\gamma = E / m_\pi c^2 = 1000/139 = 7,19\ .$$

Η ανηγμένη ταχύτητα των πιονίων είναι

$$\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = \sqrt{1 - 1/7,19^2} = 0,990\ .$$

Επομένως, ο χρόνος που απαιτείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου για να διανύσουν τα πιόνια τη διαδρομή των 10 m είναι

$$\Delta t = D / c\beta = 10 \Big/ \left(3 \times 10^8 \times 0,990\right) = 3,37 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}\ .$$

Στο σύστημα αναφοράς των σωματιδίων, αυτός ο χρόνος είναι ίσος με

$$\Delta t' = \Delta t / \gamma = 3,37 \times 10^{-8} / 7,19 = 4,69 \times 10^{-9} \text{ s} .$$

Στο χρόνο αυτό, ο αριθμός των σωματιδίων μειώνεται από N_0 σε N, όπου

$$N = N_0 e^{-\Delta t'/\tau_\pi}$$

Αν R_0 και R είναι οι αντίστοιχες ροές, σε σωματίδια ανά μονάδα χρόνου, θα είναι

$$R = R_0 e^{-\Delta t'/\tau_\pi} .$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε για τη ροή των πιονίων ανά μονάδα χρόνου στο τέλος της διαδρομής

$$R = 10^6 e^{-\left(4,69\times10^{-9}/2,56\times10^{-8}\right)} = 10^6 e^{-0,183} = 0,833 \times 10^6 \text{ s}^{-1}.$$